Stabilität

- Folgende Eigenschaften wären für eine ausgewählte Teilmenge von Alternativen sinnvoll:
  - Es gibt keine Mehrheit, die eine Alternative entfernen möchte, da sie ein andere ausgewählte Alternative bevorzugt (*Minimalität*).
  - Gegen jeden Vorschlag eine momentan nicht ausgewählte Alternative aufzunehmen lässt sich eine Mehrheit finden, die eine der ausgewählten Alternativen bevorzugt (*Maximalität*).
- Def.: Eine Menge $S \subseteq A$ heißt intern stabil, wenn es kein $a,b \in S$ gibt, so dass $a>b$ gilt.
  - In Turniergraphen können nur einelementige Mengen intern stabil sein.
- Def.: Eine Menge $S \subseteq A$ heißt extern stabil, wenn es für alle $b \in A \setminus S$ ein $a \in S$ gibt, so dass $a>b$.
  - Die Good Menge ist extern stabil.

Stabile Mengen

(von Neumann & Morgenstern, 1944)

- Def.: Eine Menge S⊆A ist stabil, wenn sie intern und extern stabil ist.
  - Eine stabile Menge S⊆A besteht genau aus den von S undominierten Alternativen.
  - Wenn ein Condorcet-Gewinner existiert, bildet er die einzige (einelementige) stabile Menge.
- Satz: Wenn die Dominanzrelation transitiv ist, ist die Schwartz Menge die einzige stabile Menge.
  - Beweis: Beide Mengen bestehen aus den maximalen Elementen.

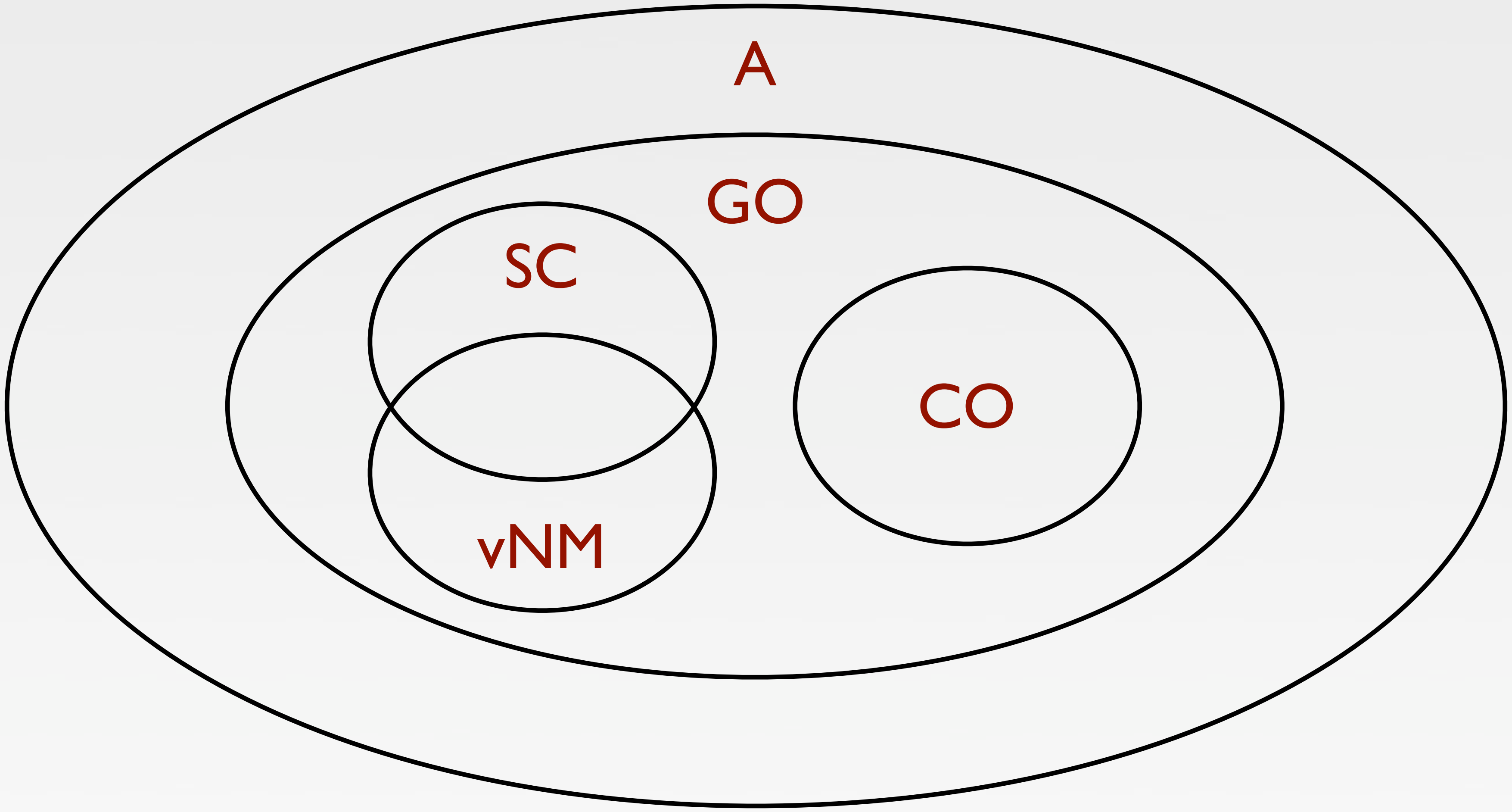
Eigenschaften stabiler Mengen

- Existenz und Eindeutigkeit
  - Es gibt Dominanzgraphen, in denen es keine stabile Menge gibt.
  - Es gibt Dominanzgraphen, in denen es mehrere stabile Mengen gibt.
- Satz: Jede stabile Menge ist in der Good Menge enthalten.
  - Beweis: Tafel
- Jede externe stabile Menge schneidet sich mit jeder nichtleeren undominierten Menge.
  - Jede stabile Menge schneidet sich mit der Schwartz Menge.
- Die Copeland Menge kann einen leeren Schnitt mit jeder stabilen Menge haben.

Berechnung stabiler Mengen

- Satz:
    - Festzustellen, ob in einem gegebenen Dominanzgraphen eine stabile Menge existiert ist NP-vollständig.
    - Festzustellen, ob eine Alternative in einer stabilen Menge liegt ist NP-vollständig, selbst wenn die Existenz einer stabilen Menge garantiert ist.
- Beweis:
    - In NP: Eine Lösung zu Überprüfen ist einfach.
    - NP-schwer: Reduktion von 3SAT. Tafel.
        - Lemma: Jede stabile Menge muss zwei gegenüberliegende Variablenknoten jeder Variable enthalten.
        - Lemma: Keine stabile Menge enthält Klauselknoten irgendeiner Klausel.
        - Klauselmenge ist genau dann erfüllbar wenn es eine stabile Menge gibt.

(Vorläufige) Ergebnisse



Copeland (1951)	CO	$O(m^2)$
Good (1971)	GO	$O(m^2)$
Schwartz (1972)	SC	$O(m^2)$
Stabile Mengen (1944)	vNM	$O(2^m)$